数理解析研究所講究録 1213 巻 2001 年 6-18

Zariski 幾何の fiber の次元について

鹿児島国際大学国際文化学部
福崎賢治 (Kenji Fukuzaki)
Faculty of Intercultural Studies
The International University of Kagoshima

1 定義と次元計算

定義 1.1 ある集合 D の上の *Zariski* 幾何とは、次の公理を満たす $D, D^2, D^3, \cdots$ 上の *Noetherian topologies* の *family* のことである。これより、$C \subseteq E \times Y$ で $a \in E$ のとき、$C(a) = \{y \in Y : (a, y) \in C\}$ とする。

Z0) 関数 $f : D^n \to D^m$ が $f(x) = (f_1(x), \cdots, f_m(x))$ で与えられていて各 f_i が *constant* か座標射影のとき、f は連続である。さらに、D^n の対角線集合 $x_i = x_j$ は閉集合である
Z1) $C \subseteq D^n$ が既約な閉集合で $\pi : D^n \to D^m$ が射影のとき、ある閉集合 $F \subset \overline{\pi(C)}$ があって $\pi(C) \supseteq \overline{\pi(C)} \setminus F$ である。
Z2) D は既約である。さらに閉集合 $C \subseteq D^{n+1}$ に対してある自然数 N が存在して、任意の $a \in D^n$ に対して $C(a) = D$ または $|C(a)| < N$ である。
Z3) $dim(D^n) \leq n$. さらに $C \subseteq D^n$ が *closed* であって既約とし、$T_{i,j}$ を第 i 座標と第 j 座標が等しい D^n の対角線集合としたとき全ての空でない $C \cap T_{i,j}$ の成分の次元は $\geq dim(C) - 1$ である。

ここで $\overline{\pi(C)}$ は $\pi(C)$ の閉包のことであり、次元は *Noetherian topology* としての次元である。

D は全ての射影が閉写像のとき、complete であると言われる。このとき公理 Z1) は自動的に満たされる。

まず $C \subseteq D^n \times D^m$ で $a \in D^n$ のとき、関数 $f : x \to (a, x)$ $(x \in D^m)$ が連続であることより C が closed ならば $C(a)$ も closed である。

補題 1.2 *1* 点集合 *(singleton)* は閉集合である。

補題 1.3 閉集合 X, Y が既約ならば、集合 $X \times Y$ も既約な閉集合である。

系 1.4 D^n は既約である。

補題 1.5 今 $\pi : D^n \to D^k$ を射影として、$C \subseteq D^n$ を閉集合とする。$F = \overline{\pi(C)}$ とおく。もし C が既約ならば F も既約である。
もし F が既約ならばある C の既約成分 C' に対して $F = \overline{\pi(C')}$ である。

補題 1.6 $E \subseteq D^n$ として、$C \subseteq E \times D$ が閉集合だとする　もしある $a \in E$ に対して $C(a)$ が有限ならば、ある閉集合 $F \subseteq E$ があって全ての $a \in E \setminus F$ に対して $C(a)$ は有限である。

定理 1.7 (次元定理) $C_1, C_2 \subseteq D^n$ を既約な閉集合としそれぞれの次元を d_1, d_2 とすると、$C_1 \cap C_2$ の空でない成分の次元は少なくとも $d_1 + d_2 - 1$ 以上である。

補題 1.8 $\pi : D^n \to D^k$ を射影として、$C \subseteq D^n$ を既約な閉集合とする。

1. $\overline{\pi(C)} = D^k$ ならば $dim(C) \geq k$ である。
2. もしある $a \in D^k$ に対して $\pi^{-1}(a) \cap C$ が有限ならば $dim(C) \leq k$ である。

系 1.9 $dim(D^n) = n.$

系 1.10 全ての閉集合は有限次元である。

定義 1.11 $f : D^n \to D^k$ を写像として、$C \subseteq D^n$ を閉集合とする。f が C 上 *generically finite to one* であるとは、ある固有な閉集合 $F \subset \overline{f(C)}$ があって全ての $a \in f(C) \setminus F$ に対して $f^{-1}(a) \cap C$ が有限となることである。

補題 1.12 $C \subseteq D^n$ を既約な閉集合とし、$\pi : D^n \to D^{n-1}$ を射影とする。もしある $a \in \pi(C)$ に対して $\pi^{-1}(a) \cap C$ が有限ならば π は C 上 *generically finite to one* である。

補題 1.13 $C \subseteq D^n$ を既約な閉集合とする。　すると C 上 *generically finite to one* な射影 $\pi : D^n \to D^{n-1}$ がある。

補題 1.14 $C \subseteq D^n$ を既約な閉集合で $dim(C) = k$ とする　すると C 上 *generically finite to one* な射影 $\pi : D^n \to D^k$ があって $\overline{\pi(C)} = D^k$ である。

系 1.15 $C \subseteq D^n, C' \subseteq D^m$ を既約な閉集合とする。

1. $dim(C \times C') = dim(C) + dim(C')$.
2. 射影 $\pi : D^n \to D^{n-1}$ が C 上 *generically finite to one* ならば $dim(C) = dim(\overline{\pi(C)})$ である。
3. $\pi : D^n \to D^m$ を射影とし、$C \subseteq D^n$ を閉集合とする。すると $dim(\pi(C)) \leq dim(C)$ である。

補題 1.16 D_1 を D^k の既約な閉集合として、E を $D_1 \times D^m$ の既約な閉集合とする　すると D_1 の固有な既約閉集合 F_1 があって、任意の $a \in D_1 - F_1$ に対して $E(a)$ のすべての成分の次元は $dim(E) - dim(D_1)$ 以上である

以上の事実は、補題 1.12、系 1.15 の 3 を除いて [Mar] ないしは [H-Z] にあるものである。補題 1.12 は補題 1.6（[H-Z] の Lemma2.4）から、系 1.15 の 3 は系 1.15 の 1,2 からでる。

2　モデル論的な事実

この節では Zariski 幾何のいくつかの大切なモデル論的性質を述べる。証明は前節と同様に [Mar] ないしは [H-Z] を参照すること。

定義 2.1 集合 $A \subseteq D^n$ が *constructible* とは、A が閉集合の *boolean combination* であるときに言う。

補題 2.2 全ての空でない *constructible set* は $\bigcup_{i=1}^{m} F_i \setminus E_i$ の形をしている。ここで F_i, E_i は閉集合であり、F_i は既約で $E_i \subset F_i$ である。

定理 2.3 (Quantifier Elimination) $A \subseteq D^{n+1}$ を *constructible set* とし、$\pi : D^{n+1} \to D^n$ を射影とすると、$\pi(A)$ は *constructible set* である。

命題 2.4 (Strong minimality) $A \subseteq D^{n+1}$ を *constructible set* とすると、ある自然数 N があり全ての $a \in D^n$ に対して $|C(a)| < N$ または $|D \setminus C(a)| < N$ である。

今から D を次のようにしてモデル論で言う first order structure と見ることにする。まず universe として D をとり、全ての閉集合 $C \subseteq D^n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ に対して n-arry relation symbol を付け加えその interpretation を C とする。簡単のため同じ文字 C を用いることにする。

quantifier elimination により、この structure の definable set は全て constructible set である。また D は strongly minimal structure である。従って constructible set に対して Morley rank を考えることができる。

以下 A が constructible set のとき $dim(A)$ で A の閉包の次元を表すことにする。つまり $dim(A) = dim(\overline{A})$ である。

補題 2.5 *A が constructible で空でないとすると、$dim(\overline{A} \setminus A) < dim(A)$ である。*

定理 2.6 *全ての constructible set A に対して $RM(A) = dim(A)$ である。ここで $RM(A)$ は A の Morley rank を表す。*

以下次元と同様に constructible set A が既約であるとはその閉包 $\overline{A}$ が既約であることとする。$F_1, \cdots, F_m$ が $\overline{A}$ の既約成分のとき、各 $F_i \cap A$ が A の既約成分である。

補題 2.7 *constructible set A の Morley degree は A の既約成分の個数である。*

このように Zariski 幾何においても代数幾何と同様なモデル論的性質が成り立っている。

さらに first order structure D の elementary extension D^* を考える。

定義 2.8 *D^* を D の elementary extension とする。*

1. *C を D^n の閉集合（従って relation symbol）とする。$C \subseteq D^n$ に対して $C(D^*)$ は D^{*n} の部分集合である。この形の集合を 0-closed set と呼ぶ。*
2. *A を D^* の部分集合としたとき、D^{*n} の A-closed set とは $C(a)$ の形の集合のこととする。ここで C は D^{*m+n} の 0-closed set であり $a \in A^m$ である。*

定理 2.9 *D^* に上の定義の集合を basic closed set とする位相を入れたとき、D^* は Zariski 幾何となる。D を部分位相空間として含む。D が complete なら D^* もそうである。*

3 fiberの次元

$\pi : D^n \to D^m$ を射影とし、$C \subseteq D^n$ を既約な閉集合とする。これより十分saturate している D の elementary extension D^* の中で考える。$c \in C(D^*)$ を $c \in C$ と略記する。$C \subseteq D^n$ で C が 0-closed であることを意味することにする。

$c \in C$ に対し集合 $C_c^\pi = \{a \in C : \pi(c) = \pi(a)\}$ を π の c を通る C 上の fiber という。

まず D が strongly minimal で Morley rank の sum formula が成り立つことより次の補題が成り立つ。これより $c \in C$ が generic over 0 のことを単に generic という。勿論 c は D^{*n} に存在する

補題 3.1 (Generic Fibers Lemma) $c \in C$ を *generic* とすると、*generic fiber* C_c^π の次元は

$$dim(C_c^\pi) = dim(C) - dim(\pi(C))$$

で与えられる。

Morley rank の sum formula を使った証明は [Mar] 参照のこと。[Mar] では別に Morley rank を使わない別証明も与えているがここではそれと違った Morley rank を使わない証明を与える。

まず容易な補題として、次を用意する。証明は省略する。

補題 3.2 $\sigma : D^n \to D^{n-1}$、$\tau : D^{n-1} \to D^m$ を射影とし、$C \subseteq D^n$ を既約な閉集合とする。すると、

$$\overline{\tau(\overline{\sigma(C)})} = \overline{\tau\sigma(C)}.$$

proof of Generic Fibers Lemma:

case 1: $m = n - 1$

今 $F = \{x \in D^{n-1} : \pi^{-1}(x) \cap C\ infinite\}$ とおくと、F は閉集合である。もし $F = \pi(C)$ ならば $C = D \times F$ であり、全ての fiber の次元は 1 となり、しかも $dim(C) = dim(F) + 1$ となるからよい。

もし $F = \pi(C)$ でないならば generic fiber C_c^π は有限となり次元は 0 である。一方系 1.15 より $dim(C) = dim(\pi(C))$ である。

case 2: $m < n - 1$

n に関する帰納法で示す。今 π を $\pi = \tau\sigma$、ここで $\sigma : D^n \to D^{n-1}$, $\tau : D^{n-1} \to D^m$、と分解する。$F = \{x \in D^{n-1} : \sigma^{-1}(x) \cap C\ infinite\}$ とおく。F は閉集合である

1) $F = \sigma(C)$ とする。$C = D \times F$ である。$\sigma(C)$ が既約な閉集合であり、$\sigma(c)$ が $\sigma(C)$ で generic なことより帰納法の仮定を使って、

$$dim((\sigma(C))^{\tau}_{\sigma(c)}) = dim(\sigma(C)) - dim(\tau\sigma(C)).$$

よって

$$dim((\sigma(C))^{\tau}_{\sigma(c)}) = dim(C) - 1 - dim(\pi(C)).$$

一方 $C^{\pi}_c = D \times (\sigma(C))^{\tau}_{\sigma(c)}$ だから結論が出る。

2) $F \subset \sigma(C)$ とする。$\sigma(c) \notin F$ より C^{σ}_c は有限である。$\overline{\sigma(C)}$ が既約な閉集合で、$\sigma(c)$ が $\sigma(C)$ で generic なことより帰納法の仮定を使って、

$$dim((\overline{\sigma(C)})^{\tau}_{\sigma(c)}) = dim(\overline{\sigma(C)}) - dim(\tau(\overline{\sigma(C)})$$

である。前と同様に $dim(C) = dim(\overline{\sigma(C)})$ であり、前の補題により $\overline{\tau(\overline{\sigma(C)})}$ $\overline{\tau\sigma(C)}$ であるから上式の右辺は $dim(C) - dim(\pi(C))$ に等しい。閉集合 C^{π}_c は σ によって $(\sigma(C))^{\tau}_{\sigma(c)}$ に移る。($dim(C^{\pi}_c) \geq dim(C) - dim(\pi(C))$ である。)

次に C^{π}_c と $(\sigma(C))^{\tau}_{\sigma(c)}$ が次元が等しいことを示す。今 C^{π}_c の成分で有限な σ の fiber を持たないものがあったとして、その一つを E とする。$E = D \times \sigma(E)$ であり、$\sigma(E)$ は閉集合で $\sigma(E) \subseteq F$ であり、$\sigma(c)$-closed な $(\sigma(C))^{\tau}_{\sigma(c)}$ の成分となっている。$\sigma(E)$ が $(\sigma(C))^{\tau}_{\sigma(c)}$ の次元を与えるものではないことを示す。(明らかに $\overline{(\sigma(C))^{\tau}_{\sigma(c)}} = (\overline{\sigma(C)})^{\tau}_{\sigma(c)}$ である。)

F の成分で $\sigma(E)$ を含むものを一つとり、F_0 とする。$\tau(F_0)$ は $\pi(c)$ を含み、$\pi(c)$ は既約な $\pi(C)$ の generic point であることより、$\tau(F_0)$ は $\pi(C)$ で dense、つまり、$\overline{\pi(C)} = \overline{\tau(F_0)}$ である。$d \in F_0$ を F_0 で generic、$\tau(d) = \pi(c)$ となるようにとる。帰納法の仮定より、

$$dim((F_0)^{\tau}_d) = dim(F_0) - dim(\pi(C)).$$

ここで、$\sigma(E) \subseteq (F_0)^{\tau}_d$ であり、

$$dim(F_0) \leq dim(F) < dim(\sigma(C)) \leq dim(C)$$

より、

$$dim(\sigma(E)) < dim(C) - dim(\pi(C)).$$

よって $\sigma(E)$ が $(\sigma(C))^{\tau}_{\sigma(c)}$ の次元を与えるものではない。従って $\sigma(C))^{\tau}_{\sigma(c)}$ は有限な fiber を持つ C^{π}_{c} の成分の像である。従って C^{π}_{c} と $(\sigma(C))^{\tau}_{\sigma(c)}$ は次元が等しい。よって結論が出る。

さらに、

補題 3.3 *generic fiber* の全ての成分は、同じ次元 $dim(C)-dim(\pi(C))$ を持つ。

Proof: 証明は [Mar] による。$l=dim(\pi(C))$ とおくと、補題 1.14 より、$\overline{\pi(C)}$ 上 generically finite to one な射影 $\tau : D^m \to D^l$ がある。generic な $b \in \tau\pi(C)$ に対して、$\tau^{-1}(b)$ は有限であり、従って $(\tau\pi)^{-1}(b)$ は π の fiber の成分の有限個の和である。次元定理 1.7 により、全ての $(\tau\pi)^{-1}(b)$ の成分の次元は少なくとも $dim(C)+dim(\{b\}\times D^{n-l})-n=dim(C)-dim(\pi(C))$ 以上であるからいえた。

さて generic fiber の次元はしっかりと確定したが、一般の点の fiber の次元はどうであろうか？代数幾何では C を variety としたとき任意の $c \in C$ に対して

$$dim(C^{\pi}_{c}) \geq dim(C)-dim(\pi(C))$$

である。つまり generic fiber の次元が最小である。

現在のところ一般の Zariski 幾何に対しては未解決である。わかっているのは次の命題である。

命題 3.4 ある固有な $F \subset C$ があって任意の $c \in C \setminus F$ に対して

$$dim(C^{\pi}_{c}) \geq dim(C)-dim(\pi(C)).$$

Proof: 補題 1.16 を使う。今 $D_1=\overline{\pi(C)} \subseteq D^m$ とおく。C は $D_1 \times D^{n-m}$ の既約な閉集合である。よって補題 1.16 よりある固有な閉集合 $F_1 \subset D_1$ があって任意の $a \in D_1 \setminus F_1$ に対して $dim(C(a)) \geq dim(C)-dim(D_1)$ である。$F=\pi^{-1}(F_1)\cap C$ とすると F は閉集合である。$\pi(C)\setminus F_1$ が空でないことより $F \subset C$. 任意の $c \in C \setminus F$ に対して $a=\pi(c) \in D_1 \setminus F_1$ であり、$dim(C(a))=dim(C^{\pi}_{c})$ である。

一方 ample な Zariski 幾何に対しては成り立つことがわかっている。しかし証明は [H-Z] の大定理 Theorem B を用いるものであり、残念ながら直接証明は得られていない。

他方 complete な Zariski 幾何に対しては成り立つことがわかっている。証明は [Mar] にある。ここでは [Mar] と違うより簡単な直接証明を与える。

命題 3.5 D を *complete* な *Zariski* 幾何とする。$\pi : D^n \to D^m$ を射影とし、$C \subseteq D^n$ を既約な閉集合とする。すると任意の $c \in C$ に対して

$$dim(C_c^\pi) \geq dim(C) - dim(\pi(C)).$$

Proof:
case 1: $m = n - 1$
Generic Fibers Lemma のときと同じである。
case 2: $m < n - 1$
n に関する帰納法で示す。今 π を $\pi = \tau\sigma$、ここで $\sigma : D^n \to D^{n-1}$, $\tau : D^{n-1} \to D^m$、と分解する。
complete より $\sigma(C)$ は既約な閉集合である。帰納法の仮定を使って、

$$dim((\sigma(C))_{\sigma(c)}^\tau) \geq dim(\sigma(C)) - dim(\tau\sigma(C))$$

である。明らかに $\sigma(C_c^\pi) = (\sigma(C))_{\sigma(c)}^\tau$ だから

$$dim(\sigma(C_c^\pi)) \geq dim(\sigma(C)) - dim(\pi(C))$$

である。
1) $\sigma|C$ が有限な fiber を持たないとき、$dim(C) = dim(\sigma(C)) + 1$ である。同様に $dim(C_c^\pi) = dim(\sigma(C_c^\pi)) + 1$ である。従って結論が出る。
2) $\sigma|C$ が有限な fiber を持つとき、$dim(C) = dim(\sigma(C))$ である。一般に $dim(\sigma(C_c^\pi)) \leq dim(C_c^\pi)$ であるから結論が出る。

[Mar] はまず、complete ならば任意の自然数 k に対して $\{c \in C : dim(C_c^\pi) \geq k\}$ が閉集合であることを示している。このことより次の節の命題 4.2 を使って上の命題が導かれる。

4 いくつかの事実

この節では fiber の次元に関する事実を幾つか与える。
有限な fiber を持つ射影に関しては容易に、

命題 4.1 $\pi : D^n \to D^m$ を射影とし、$C \subseteq D^n$ を（必ずしも既約でない）閉集合とする。$\pi|C$ が有限な *fiber* を持つならば、ある固有な閉集合 $F \subset C$ があって任意の $c \in C \setminus F$ に対して C_c^π は有限である。

Proof: 既約な閉集合 C に対して示せば十分である よって今、C は既約な閉集合とする

case 1: $m = n - 1$

補題 1.12 からある固有な閉集合 $F' \subset \overline{\sigma(C)}$ があって、全ての $a \in \sigma(C) \setminus F'$ に対して $\sigma^{-1}(a) \cap C$ が有限である $F = \sigma^{-1}(F') \cap C$ とおけばよい。

case 2: $m < n - 1$

n に関する帰納法で示す。今 π を $\pi = \tau\sigma$、ここで $\sigma : D^n \to D^{n-1}$, $\tau : D^{n-1} \to D^m$、と分解する。

$c \in C$ で C_c^π が有限であるとする。C_c^σ が有限であることは明らか。よって $\sigma|C$ は有限な fiber を持つ。今 $b = \pi(c)$ とすると、$\tau^{-1}(b) \cap \sigma(C)$ は有限だから閉集合である。$\tau^{-1}(b)$ は閉集合だから、これは $\tau^{-1}(b) \cap \overline{\sigma(C)}$ と等しい。よって $\tau|\overline{\sigma(C)}$ も有限な fiber を持つ。

帰納法の仮定より、$\overline{\sigma(C)}$ にある固有な閉集合 G があって任意の $d \in \overline{\sigma(C)} \setminus G$ に対して $(\overline{\sigma(C)})_d^\tau$ は有限である。また補題 1.12 からある固有な閉集合 $H \subset \overline{\sigma(C)}$ があって、全ての $a \in \sigma(C) \setminus H$ に対して $\sigma^{-1}(a) \cap C$ が有限である。

$F' = G \cup H$ とおくと $F' \subset \overline{\sigma(C)}$ は閉集合である。$\overline{\sigma(C)}$ が既約なことより F' は固有な部分閉集合である。$F = \sigma^{-1}(F')$ とおけばよい。

今 $\pi : D^n \to D^m$ を射影とし、$C \subseteq D^n$ を既約な閉集合とする。自然数 k に対して集合 $C_k = \{a \in C : dim(C_a^\pi) \geq k\}$ を考えたとき、代数幾何では全ての自然数 k に対して C_k が閉集合である。(Shafarevich [Sh, p61] 参照のこと。) 実は一般の Zariski 幾何では次のことが成り立つ。

命題 4.2 全ての自然数 k に対して C_k が閉集合ならば *generic fiber* の次元が (*fiber* の中で) 最小である。

Proof: $c \in C$ を generic とする。Generic Fibers Lemma により $dim(C_c^\pi) = dim(C) - dim(\pi(C))$ である。$l = dim(C) - dim(\pi(C))$ とおく。今ある $a \in C$ に対して $dim(C_a^\pi) = k < l$ とする。仮定より、$C_{k+1} = \{c \in C : dim(C_c^\pi) \geq k + 1\} \subset C$ は固有な閉集合である。一方次の補題により、C_{k+1} は $0 - definable$ である。しかし C_{k+1} は generic な c を含む これは矛盾である。

補題 4.3 $C \supseteq D^{n+m}$ は閉集合とすると、全ての自然数 k に対して $\{a \in D^m : dim(C(a)) \leq k\}$ は *0-definable* である。

Proof: $C(a) \subseteq D^n$ より、$k < n$ なる k に対して示せばよい。

まず $dim(C(a)) \leq k$ であることと、ある射影 $\pi : D^n \to D^k$ が存在して $\pi|C(a)$ が有限な fiber を持つことと同値である。

今 $dim(C(a)) = r \leq k$ とすると、補題 1.14 よりある $C(a)$ 上有限な fiber を持つ射影 $\sigma : D^n \to D^r$ が存在する。σ を $\pi : D^n \to D^k$ と $\tau : D^k \to D^r$ に分解すれば π は有限な fiber を持つ 逆は補題 1.8 から明らかである。

次に、ある定まった自然数 N があって任意の $a \in D^m$ に対して、もし $\pi|C(a)$ が有限な fiber を持つならばその fiber の濃度は N 以下であることを示す。

今 π を $(x_1, \cdots, x_n) \to (x_1, \cdots, x_k)$ であるとし、$C(a) = \{b \in D^n : (a, b) \in C\}$ としても差し支えない。$\pi|C(a)$ が有限な fiber を持ったとする。つまり、ある $d \in D^k$ があって、$C(ad) \subseteq D^{n-k}$ が有限である。$C(ad)$ の中の x_i 座標（$k + 1 \leq i \leq n$）に注目すると、公理 $Z1$) より、どんな $ade \in D^{n+m-1}$（ここで $e \in D^{n-k-1}$）に対しても $C(ade)$ が有限ならばその濃度はある自然数 N より小さい。（N は C によってのみ決まる。）よって ad が何であっても、もし $C(ad)$ が有限ならばその濃度は N^{n-k} より小さい。

以上より 0-definable であることがわかる。

$C_a^\pi = \{(b, \pi(a)) \in D^n : b \in C(\pi(a))\}$ だから、当然 C_k も 0-definable となる。

命題 4.2 の逆、つまり generic fiber が fiber の中で最小ならば任意の k に対して C_k は閉集合であるかどうかはわかっていない。強めた形、全ての既約閉集合で generic fiber が fiber の中で最小ならば、任意の既約閉集合 C と任意の k に対して C_k は閉集合であるかどうかもわかっていない。

しかし D が complete ならば (必ずしも既約でない) 閉集合 C に対して C_k が閉集合である。[Mar] では complete だけを使った証明を与えているが、ここでは complete Zariski 幾何では generic fiber が fiber の中で最小の次元であることを使った証明を与える。

命題 4.4 *D を compete な Zariski 幾何とし、$C \subseteq D^n$ を閉集合、$\pi : D^n \to D^m$ を射影とする。このとき任意の自然数 k に対して C_k は閉集合である。*

Proof: C の次元に関する帰納法で示す。

$dim(C) = 0$ のとき、C は有限個の singleton である。よって明らか。

$dim(C) > 0$ として、$dim(C)$ より小さい次元の閉集合に対して言えたと仮定する $C = F_1 \cup F_2$、(ここで F_1, F_2 は閉集合) とすると、$dim(C_a^\pi \geq k$ は次と同値である。

$$a \in \pi^{-1}(\pi(\{b \in F_1 : dim((F_1)_b^\pi \geq k\}) \cup \pi(\{b \in F_2 : dim((F_2)_b^\pi \geq k\})).$$

ここで各 $\{b \in F_i : dim((F_i)_b^\pi \geq k\}$ が閉集合であると仮定すると、completeness よりそれらの π の像も閉集合である。よって $C_k = \{a \in C : dim(C_a^\pi) \geq k\}$ も閉集合となる。C の成分への分解を考えることにより、今 C を既約であるとしてよい。

$l = dim(C) - dim(\pi(C))$ とおくと、l が fiber の次元の中での最小値である よって $k \geq l+1$ なる k に対して示せばよい。

$A = C_{l+1}$ とおく。A は 0-definable であるから constructible であり、C の generic point を含まないことより、$\overline{A}$ は C の固有な閉集合である。よって帰納法の仮定より 任意の k に対して $(\overline{A})_k$ は閉集合である。

ここで明らかに $k \geq l+1$ なる k に対しては $(\overline{A})_k = C_k$ である。

上の命題より Shafarevich [Sh, p61 Theorem 7] に相当するものとして、complete の場合に次の系が成り立つ。

系 4.5 *D を complete な Zariski 幾何とする。$C \subseteq D^n$ を既約な閉集合で $\pi : D^n \to D^m$ を射影とするとき、*

1. 全ての $a \in \pi(C)$ に対して $dim(\pi^{-1}(a) \cap C) \geq dim(C) - dim(\pi(C))$.
2. $\pi(C)$ の中に空でない開集合 U があり、全ての $a \in U$ に対して
$dim(\pi^{-1}(a) \cap C) = dim(C) - dim(\pi(C))$.

Proof: 1. は $C_a^\pi = \pi^{-1}(\pi(a)) \cap C$ であることからでる。

2. 前の命題より、$\{a \in C : dim(\pi^{-1}(\pi(a)) \cap C) > dim(C) - dim(\pi(C))\}$ は C の閉集合である。completeness より、$\{b \in \pi(C) : dim(\pi^{-1}(b) \cap C) > dim(C) - dim(\pi(C))\}$ は $\pi(C)$ の閉集合である。

また Shafarevich [Sh, p61 Theorem 8] では projective variety の既約性の判定条件を与えている。これに相当するものとしては次の定理がある。(projective なら complete である。)

定理 4.6 *D を complete な Zariski 幾何とする。$C \subseteq D^n$ を閉集合、$\pi : D^n \to D^m$ を射影とし、$\pi(C)$ が既約だったとして任意の $a \in \pi(C)$ に対して $\pi^{-1}(a) \cap C$ が既約でありすべて同じ次元を持つと仮定する。このとき C は既約である。*

Proof: 仮定より、任意の $a \in \pi(C)$ に対して $dim(\pi^{-1}(a) \cap C) = k$ とおける。$C = \bigcup_{1 \le i \le t} C_i$ を C の (最小の) 成分分解とする。

D が complete なことより、全ての $\pi(C_i)$ は閉集合である。$\pi(C)$ が既約だから、ある i に対して $\pi(C) = \pi(C_i)$ である。今 $C = C_1 \cup \cdots \cup C_s \cup C_{s+1} \cup \cdots \cup C_t$ で $1 \le i \le s$ に対して $\pi(C) = \pi(C_i)$ であり、$s+1 \le j \le t$ に対して $\pi(C) \subset \pi(C_j)$ とする。

$Y = \pi(C)$ とおき、$Y' = Y \setminus \bigcup_{s+1 \le j \le t} \pi(C_j)$ とし、$C' = \pi^{-1}(Y') \cap C$ とする。C' は C の部分開集合である。さらに $1 \le i \le s$ に対し $C'_i = C_i \cap \pi^{-1}(Y')$ とすると、C'_i は C_i の部分開集合である。まず $C' = \bigcup_{1 \le i \le s} C'_i$ である。($\supseteq$ は明らか。$a \in C'$ とすると、$a \in \pi^{-1}(Y')$ より $a \in \bigcup_{1 \le i \le s} C_i$、よって $\supseteq$ がでる。) また明らかに、$1 \le i \le s$ に対して $\pi(C'_i) = Y'$ である。

今 $m_i = min\{dim(\pi^{-1}(a) \cap C'_i : a \in Y'\} = min\{dim(\pi^{-1}(a) \cap C_i : a \in Y'\}$ とする。$m_i = dim(C_i) - dim(\pi(C))$ である。上の系より最小値 m_i は Y' の空でない部分開集合 U_i で実現される。$U = \bigcap U_i$ とおく。

$b \in Y'$ に対して、$\pi^{-1}(b) \cap C' = \bigcup_{1 \le i \le s} \pi^{-1}(b) \cap C'_i$ で、$\pi^{-1}(b) \cap C'$ は次元 k で既約であることより、$k = max_{1 \le i \le s} m_i$ で、ある $1 \le i_0 \le s$ があって $m_{i_0} = k$ で任意の $b \in U$ に対して $dim(\pi^{-1}(b) \cap C'_{i_0}) = k$ である。

すると実は、全ての $b \in Y$ に対して $dim(\pi^{-1}(b) \cap C'_{i_0}) = k$ である。($Z = \{b \in Y : dim(\pi^{-1}(b) \cap C'_{i_0}) \ge k\}$ とおくと Z は閉集合であり 仮定より $Z = \{b \in Y : dim(\pi^{-1}(b) \cap C'_{i_0}) = k\}$ となる。これは U を含み $\overline{U} = Y$ である。)

従って次元を比べることにより、全ての $b \in Y$ に対して、$\pi^{-1}(b) \cap C = \bigcup_{1 \le i \le s} \pi^{-1}(b) \cap C_i$ で、$dim(\pi^{-1}(b) \cap C_i) \le k$、$dim(\pi^{-1}(b) \cap C_{i_0}) = k$ であることがわかる。よって $\pi^{-1}(b) \cap C$ の既約性より 全ての $b \in Y$ に対して $\pi^{-1}(b) \cap C = \pi^{-1}(b) \cap C_{i_0}$、これは $C = C_{i_0}$ を意味する。

参考文献

[Bous] E. Bouscaren (Ed.), *Model Theory and Algebraic Geometry*, Lecture Notes in Mathematics 1696, Springer, 1998.

[Buec] S. Buechler, *Essential Stability Theory*, Springer, 1996.

[H-Z] E. Hrushovski and B. Zil'ber, *Zariski Geometries*, Journal of AMS 9 (1996), 1-56.

[Mar] D. Marker, *Zariski Geometries*, lecture notes.

[Sh] I. R. Shafarevich, *Basic Algebraic Geometry*, Springer, 1977.